Kružnice a Úhly v Ní

Díl Druhý

Uplynul nějaký čas a je tu druhý díl letošního premiérového Pikomatího seriálu. Tentokrát navážeme tam, kde jsme minule skončili a uvedeme si větu o již zmíněných středových a obvodových úhlech, jejíž trochu slabší verzi jste dokazovali v 7. úloze 1. série. Důkaz následujícího tvrzení je zároveň jedním z jejích možných řešení. Na tomto místě bych ještě uvedl, že drtivá většina těch, kteří se tuto úlohu pokusili řešit, dospěla ke zdárnému závěru, za což chválím.

Věta 1. Nechť je dána kružnice k se středem S a poloměrem $r \in \mathbb{R}^+$ a v ní tětiva AB. Nechť středový úhel příslušný některému oblouku AB má velikost ω. Pak libovolný obvodový úhel, příslušející tomuto oblouku má velikost $\varphi = \frac{\omega}{2}$.

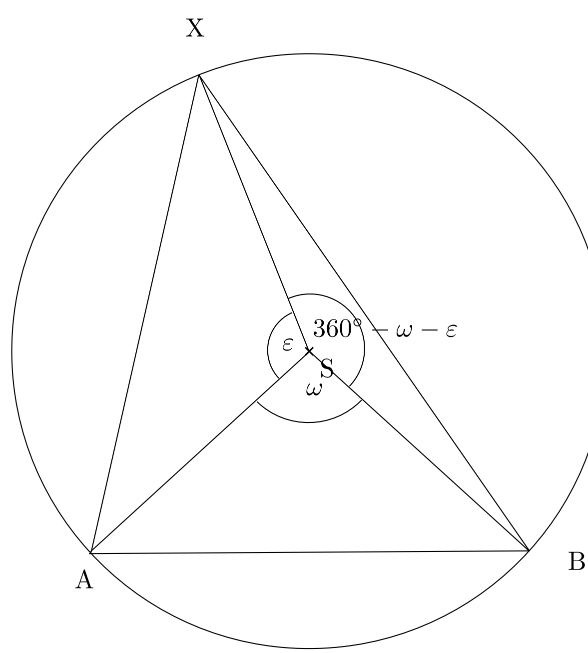
Důkaz. Viz obrázek. Označme ještě $\sphericalangle ASX = \varepsilon$. Dostáváme doplněním do 360°, že $\sphericalangle BSX = 360° - \omega - \varepsilon$. Dále je zřejmé, že $|AS| = |BS| = |XS|$, protože to jsou poloměry dané kružnice, takže máme v obrázku dva rovnoramenné trojúhelníky AXS a BXS, jejichž úhly snadno dopočítáme doplněním do 180°:

$$|\sphericalangle AXS| = 90° - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\sphericalangle BXS| = \frac{\omega}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - 90°.$$

Obvodový úhel $\sphericalangle AXB$ je samozřejmě součtem těchto dvou úhlů:

$$|\sphericalangle AXB| = 90° - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - 90° = \frac{\omega}{2}.$$



Než se dostaneme k druhé seriálové úloze, povíme si ještě o jednom zajímavém úhlu, který můžeme v kružnici uvažovat, a sice o úsekovém.

Definice 1. Nechť je dána kružnice k se středem S a poloměrem $r \in \mathbb{R}^+$ a v ní tětiva AB. Veďme tečnu t ke kružnici k bodem A. *Úsekovým úhlem* příslušným oblouku AB pak nazýváme úhel, který svírají tečna t a tětiva AB a který leží v opačné polorovině určené přímkou AB než daný oblouk AB.

Věta 2. Mějme kružnici k se středem S, tětivou AB a tečnou t, která se dotýká kružnice k v bodě A. Nechť velikost obvodového úhlu, příslušejícího některému oblouku AB je φ. Pak i velikost příslušného úsekového úhlu je φ.

Důkaz této věty hravě zvládnete i sami a pokud jej pošlete spolu s novou seriálovou úlohou, můžete si vysloužit i nějaké to malé bezvýznamné plus :-).

Úloha 7. *Nechť je dán trojúhelník ABC a nechť k je kružnice jemu opsaná. Označme dále P střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Přímka CP protíná kružnici k v bodě K, různém od bodu C. Dokažte, že trojúhelník ABK je rovnoramenný.*