Řešení První Série

Úloha 0. *Graficky ztvárněte Křivohlena.*

Řešení. Vzorové řešení spatříte na podzimním soustředění.

Vzhledem k povaze příkladu bylo očekáváno více křivých řešení, více zahleněných řešení a v neposlední řadě více řešení. Snažte se, to se u nultých příkladů obzvláště cení.

Úloha 1. *Všichni Křivohlenovi bratři jsou pojmenováni podle určitého systému. Jméno každého z nich se skládá ze dvou různých částí, které jsou složeny dohromady (záleží na pořadí). Pro každou část jména připadají v úvahu čtyři možnosti: „keř“, „křen“, „skřek“ a „křest“. Jaký je nejvyšší možný počet bratrů, které Křivohlen může mít?*

Řešení. Nejprve je třeba si uvědomit, že máme 4 různé části jmen. Jelikož jména se nemohou skládat ze dvou stejných částí, můžeme každé části jména přiřadit další $4 - 1 = 3$ jiné. Protože záleží na pořadí, máme 4 možnosti (keř, křen, skřek, křest), jak zvolit první část jména, a ke každé další 3 možnosti, jak zvolit druhou část. Celkem tedy $4 \cdot 3 = 12$ možných variant jmen.

Tato úloha byla jednoduchá, také přišlo hodně řešení. Body jsme strhávali akorát tehdy, pokud jste si neuvědomili, že jméno se skládá ze dvou různých částí, nebo pokud jste neokomentovali vaše vypsané možnosti.

Úloha 2. *Když se Křivohlen začal balit, bylo mezi šestou a sedmou hodinou večerní. Mezi devátou a desátou hodinou se dobalil a při pohledu na hodiny si všiml, že kdyby prohodil malou a velkou ručičku, dostal by čas, ve který se začal balit. Kolik bylo hodin? (Hodiny jsou standardní ručičkové. Vteřinovou a menší ručičky zanedbejte.)*

Ze zadání vyplývá, že v okamžiku, kdy schůze začala, byla malá ručička mezi šestkou a sedmičkou a velká ručička mezi devítkou a desítkou. Označme si x jako čas, kdy začala schůze. Úhel, který urazila malá ručička od dvanáctky, odpovídá x.

Obdobně, jestliže schůze skončila v y hodin, pak malá ručička urazila úhel odpovídající y. Potom stejný úhel opsala malá ručička od 6:00 (to byla na dvanáctce) do začátku schůze. Malá ručička (která se pohybuje dvanáctkrát pomaleji) opsala za tuto dobu od číslice 6 úhel $\frac{y}{12}$. Pak tedy dostáváme rovnici: $x = 6 + \frac{y}{12}$. Do chvíle, kdy schůze skončila si ručičky vyměnily místa. Uvažujeme obdobně a dostaneme rovnici: y=9+x/12.

Vyřešením této soustavy dvou rovnic o dvou neznámých dostaneme řešení: $x = 6 + \frac{114}{143}$ hodiny $= 6\,\mathrm{h}\,47\,\mathrm{min}\,49 + \frac{138}{143}\,\mathrm{s}$, což je doba, kdy začala schůze; $y = 9 + \frac{81}{143}$ hodiny $= 9\,\mathrm{h}\,33\,\mathrm{min}\,59 + \frac{23}{143}\,\mathrm{s}$, což je okamžik, kdy schůze skončila.

Nejvíce bodů bylo strháváno za neuvědomění si spojitého pohybu ručiček (mohou se pohybovat i mezi dílky, a to jak malá ručička, tak velká ručička). Vzhledem k počtu řešení a na druhý příklad poměrně velké obtížnosti, které toto nepředpokládaly, bylo nakonec strháváno méně bodů.

Někteří z vás řešení zkoušeli na budíku nebo jej jen tipli, což ovšem není korektní matematický postup.

Úloha 3. *„To s těmi grobliny vlastně nebylo zcela mimo mísu,“ spustil Strmožluč. „Kousek od Mokrokrutu je jeskyně, hemžící se grobliny. Jsou tam i zlorkové, těch je dokonce třikrát více, než groblinů. Průzkumníci ale hlásí, že uvnitř žije také prastará temná bytost, která je požírá. Každý den se vydá hodovat třikrát: na snídani, na oběd a na večeři. Ke snídani spořádá jen polovinu toho, co k obědu nebo k večeři. Na takovou snídani je potřeba 8 jednergií (jednotky energie). Zlorkové vydají na 4 jednergie a groblini na 2 jednergie. Tímto tempem ta věc sežere celou populaci jeskyně za 42 dní a mám obavu, že by se potom mohla vypravit i k nám do města.“*

„To je hrozné,“ vydechl Křivohlen. „A kolik tam těch groblinů a zlorků vlastně je?“

„To jsem právě doufal, že bys mi mohl povědět ty,“ opáčil Strmožluč.

Dokážete pomoct Křivohlenovi a správně odpovědět na jeho otázku?

Řešení. Temná bytost na snídani spořádá 8 je (jednergií), na oběd i na večeři dvakrát více, tedy 16 je. Za den tedy Temná bytost spořádá 40 je. Groblini a zlorkové jí vydrží celkem 42 dní – v jeskyni žijí bytosti, které celkem vydají na $40 \cdot 42 = 1\,680$ je. Nechť groblinů je g, zlorků je třikrát víc, tedy $3g$. My víme že platí $g \cdot 2$ (počet je za jednoho groblina) + $3g \cdot 4$ (počet je za jednoho zlorka) = 1680, tj. $14g = 1680$, $g = 120$. V jeskyni žije tedy (nešla-li zatím Temná bytost na svačinku) 120 groblinů a třikrát více, tedy 360 zlorků.

S touto jednoduchou úlohou jste si ve většině případů správně poradili, body byly strhávány jen za nedostatečně vysvětlený postup řešení či za nesprávně interpretované zadání.

Úloha 4. *„Ve Skřepasluji žijí dva klany: klan Dobrých jazyků a klan Zlých jazyků. Dobří jazykové vždy mluví pravdu a Zlí jazykové vždy lžou. Každý ze zdejších skřepaslíků patří do jednoho ze dvou klanů,“ poznamenala Hebkostřeva.*

a) Každý ze 4 skřepaslíků pronáší tvrzení. První říká: Druhý skřepaslík je Dobrý jazyk. Druhý říká: Třetí skřepaslík je Zlý jazyk. Třetí říká: Čtvrtý skřepaslík je Dobrý jazyk. Čtvrtý říká: První skřepaslík je Zlý jazyk. Kolik může být mezi skřepaslíky Dobrých a kolik Zlých jazyků?

b) Každý z 20 skřepaslíků pronáší jedno tvrzení. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ platí, že n-tý skřepaslík říká tvrzení: „Alespoň n z nás jsou Dobří jazykové.“ Dále pro $n = 11, 12, 13, \ldots, 19, 20$ platí, že n-tý skřepaslík říká tvrzení „Alespoň $n - 10$ z nás jsou Zlí jazykové.“ Kolik může být mezi skřepaslíky Dobrých a kolik Zlých jazyků?

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Tento příklad patřil k těm jednodušším, kdo nad ním strávil alespoň trochu času, pak došel ke správnému výsledku. Nejčastějším nedostatkem bylo, neuvedení nebo neokomentování postupu. Ty z vás, kteří takto ztratili body, prosíme o psaní všeho, co jste k řešení použili, třeba i naprosto zřejmé věci mohou pomoct.

Označme si skřepaslíky S_1, S_2,…,S_n.

a) S_1: S_2 mluví pravdu; S_2: S_3 lže; S_3: S_4 mluví pravdu; S_4: S_1 lže.

Uvažujme S_1, buď mluví pravdu nebo lže. 1. S_1 lže, potom z negace (znegujeme jeho výrok, protože lže) S_2 také lže. Obdobně zjistíme, že S_3 mluví pravdu. Pak z výroku S_3 platí, že i S_4 mluví pravdu a potom z výroku S_4 vyplývá, že S_1 lže (což není ve sporu se zadáním). Tedy dva lžou a dva mluví pravdu.

2. S_1 mluví pravdu. Obdobně jako v předchozím případě dostaneme, že dva mluví pravdu a dva lžou.

Mezi skřepaslíky jsou tedy dva Dobří Jazykové a dva Zlí Jazykové.

b) Předpokládejme, že S_{11} lže, pak by tedy podle jeho výroku muselo platit, že všichni mluví pravdu, což je spor, tedy S_{11} musí mluvit pravdu. Dále předkládejme, že S_{12} lže, pak by podle jeho výroku muselo platit, že nejvýše jeden z nich lže. Z toho vyplývá, že všichni ostatní potom musí mluvit pravdu, tedy i S_{13}, který tvrdí, že alespoň tři z nich mluví pravdu, což je spor. Tedy i S_{12} mluví pravdu.

Obdobnými úvahami dostaneme, že S_{13}, S_{14} a S_{15} také musí mluvit pravdu. Potom i S_1, S_2, S_3, S_4 a S_5 mluví pravdu, protože tvrdí, že alespoň n ($n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) z nich mluví pravdu a víme, že S_{11} až S_{15} určitě mluví pravdu.

Obdobně zjistíme, že i S_6, S_7, S_8, S_9 a S_{10} mluví pravdu, neboť víme, že již deset skřepaslíků mluví pravdu. Z výroku S_{15} vyplývá, že Zlých Jazyků je 5. Tedy zbývající skřepaslíci S_{16}, S_{17}, S_{18}, S_{19} a S_{20} musí určitě lhát, potom i jejich výroky sedí.

Ve skupině je tedy 15 Dobrých Jazyků a 5 Zlých Jazyků.

Úloha 5. *a) První zámek má tvar čtverce. Je mu opsána kružnice, která je zároveň vepsána druhému čtverci. Tomu je opsána kružnice, která je zároveň vepsána třetímu čtverci o hraně 50 milisáhů. Jaký je obsah zámku (prvního čtverce)?*

b) Druhý zámek má tvar trojúhelníku ABC, ve kterém je strana AC delší než strana BC. Jeho těžnice CK a výška CL dělí úhel ACB na tři shodné části. Úsečka LM je výška trojúhelníku ALC. (Body K,L,M leží postupně na úsečkách AB, AB a AC.) Obsah trojúhelníku ALM je roven 900 milisáhů čtverečních. Jaký je obsah zámku (trojúhelníku ABC)?

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Řešení. 5a) Nejprve si uvědomíme. že průměr kružnice čtverci vepsané je roven délce jeho strany a průměr kružnice čtverci opsané je roven délce jeho úhlopříčky. Nyní označme délku strany prvního čtverce jako a, délku strany druhého čtverce jako b a délku strany třetího čtverce jako c. Čtverec má všechny úhly pravé, takže můžeme dvakrát použít Pythagorovu větu: $b^2 = 2a^2$; $c^2 = 2b^2 = 4a^2$. Z poslední rovnosti úpravou získáme $a = \sqrt{\frac{c^2}{4}} = \frac{c}{2} = 25$ milisáhů. Obsah prvního čtverce pak vypočítáme jako $S = a^2 = 625$ milisáhů čtverečních.

Tuto úlohu jste měli většinou správně, ale někteří došli k výsledku metodou měření a takové řešení nelze považovat za správné, či při svých výpočtech zaokrouhlovali, což je přípustné ve fyzice, nikoli však v matematice. Pochvalu si zaslouží Tomáš Boček, který přispěl vskutku originálním řešením.

b) Nazvěme si D patu výšky trojúhelníka AKC z vrcholu K. Trojúhelníky CKL a CKD sdílí stranu CK, mají stejný úhel u vrcholu C a jsou oba pravoúhlé, takže jsou shodné podle věty *usu*. Dále vidíme, že úhly LCK a LCB mají shodnou velikost, stejně jako pravé úhly CLK a CLB, takže musí platit i $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle LKB|$. Proto je trojúhelník KBC rovnoramenný se základnou AB, takže výška z vrcholu C splývá s těžnicí a platí $|KL| = |KB| = \frac{|AB|}{4}$. Nyní si všimneme, že platí $\sin|\sphericalangle KAD| = \frac{|KD|}{|AK|} = \frac{|KL|}{|KB|} = \frac{1}{2}$, z čehož plyne $|\sphericalangle KAD| = 30°$. Pak můžeme dopočítat $|\sphericalangle AKD| = 60°$, $|\sphericalangle DKL| = 120°$ a

$|\sphericalangle CKD| = 60°$ (protože $|\sphericalangle DKC| = |\sphericalangle CKL|$). Odtud dále dopočítáme $|\sphericalangle DCK| = 30°$ a $|\sphericalangle ACB| = 90°$ (protože $|\sphericalangle ACB| = 3 \cdot |\sphericalangle DCK|$). Trojúhelníky ACB a AML jsou tedy podobné podle věty uu s koeficientem $\frac{|AB|}{|AL|} = \frac{4}{3}$. Obsah trojúhelníku ABC pak můžeme vypočítat jako $S_{ABC} = |AC| \cdot |CB| = \frac{4}{3} \cdot |AM| \cdot \frac{4}{3} \cdot |AL| = \frac{16}{9} \cdot S_{ALM} = \frac{16}{9} \cdot 900 = 1600$ milisáhů čtverečních.

Tuto úlohu odevzdali pouze tři řešitelé a všichni tři si zaslouží respekt. Propříště však prosíme o pečlivější zdůvodňování vašich postupů.

Úloha 6. *Vezměme čtyřciferné číslo s navzájem různými ciframi. Zaměníme každou jeho číslici aritmetickým průměrem ostatních tří číslic (zároveň, ne postupně). Jaké je nejmenší a největší číslo, které takto můžeme dostat?*

Řešení. Jestliže lze každou číslici zaměnit za aritmetický průměr zbývajících tří, musí být součet těchto tří číslic dělitelný třemi. Označíme-li tedy cifry tohoto čísla seřazené podle velikosti jako a, b, c a d, získáváme, že čísla $a+b+c$, $a+c+d$, $a+b+d$ a $b+c+d$ jsou dělitelná třemi. To ale znamená, že musí být dělitelné třemi i jejich rozdíly, tedy $a-b$, $a-c$, $a-d$. Protože jsou cifry navzájem různé a protože a je z nich největší, musí být všechny tyto rozdíly kladné a různé. Navíc jsou však určitě všechny menší než 10 (jsou to cifry). A tedy zřejmě $a-b = 3$, $a-c = 6$, $a-d = 9$. Z poslední zmíněné dostáváme rovnou $a = 9$, $d = 0$, neboť jiné dvě cifry této rovnosti nevyhovují. Dosazením a do zbývajících rovností získáme $b = 6$, $c = 3$. Cifry nově vzniklého čísla tedy budou $\frac{(a+b+c)}{3} = 6$, $\frac{a+b+d}{3} = 5$, $\frac{a+c+d}{3} = 4$ a $\frac{b+c+d}{3} = 3$. Nejmenší číslo které z těchto cifer složíme je 3456 (vznikne záměnou za číslo 9630). Největší číslo není 6543 (jak se někteří z vás mylně domnívali), ale 5643, protože původní číslo bylo čtyřciferné a první cifra tedy není 0. Vzniklo z čísla 3069.

Většina řešitelů se dobrala ke správnému výsledku, ale nedostatečně zdůvodnila proč původní číslo mohlo být složeno právě jen z cifer 0, 3, 6 a 9. Chválím tedy hlavně ty řešitele, kteří to měli zdůvodněné správně. Zajímavé řešení také přišlo od Jiřiny Reškové, která se vydala na řešení cestou dekadického zápisu čísla. Jen škoda, že to nebylo dotažené do konce a dobrala se tedy špatného výsledku.

Úloha 7. *Mějme situaci z Definice 2. Dokažte bez použití vět o středových a obvodových úhlech, že pokud trojúhelník AXB je rovnoramenný se základnou AB, pak platí $\omega = 2\varphi$.*

Řešení. Viz Věta.1 ve druhém dílu seriálu.